

Les nombres complexes

1^{ère} partie

① Représentation des nombres complexes:

Déf: 1) on note \mathbb{C} l'ensemble des nbres complexes

2) Il existe un élément i de \mathbb{C} tq: $i^2 = -1$

3) Tout élém: z de \mathbb{C} s'écrit de manière unique: $z = a + ib$ avec: a, b sont réels.

4) on note:

$$\begin{cases} a = \operatorname{Re}(z) \text{ la partie réelle de } z \\ b = \operatorname{Im}(z) \text{ la partie imaginaire de } z \end{cases}$$

- si $a = 0$; z est appelé imag pur.

- si $b = 0$; z est un nbre réel.

- $a + ib$ est l'écriture algébrique de z .

Exple: $\left| \begin{array}{l} \operatorname{Re}(3 - \frac{2}{5}i) = \\ \operatorname{Im}(3 - \frac{2}{5}i) = \end{array} \right.$

② Règles de calcul:

soient $z = a + ib$; $z' = a' + ib'$
deux nbres complexes

◇ Egalité: $z = z' \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

◇ Somme: $z + z' = (a + a') + i(b + b')$

◇ produit: $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$

◇ Inverse: $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$

◇ quotient: $\frac{z}{z'} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{a'^2 + b'^2}$

①

Ex: 1) Ecrire sous la forme $x + iy$:

1° $\frac{1+i}{i}$

4° $\frac{i}{i+1}$

7° $\frac{3}{i+1} - \frac{1}{2i}$

2° $\frac{i-4}{2i}$

5° $\frac{3+4i}{i-1}$

3° $\frac{2}{4-i}$

6° $\frac{i-3}{i+3}$

③ Conjugué d'un nbre complexe

Déf: on appelle conjugué de $z = a + ib$; le nombre complexe noté \bar{z} tq: $\bar{z} = a - ib$

Prop: $z = a + ib$; $z' = a' + ib'$

$$z = z' \iff z = \bar{\bar{z}}$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}; \quad \overline{\bar{z}} = z$$

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$$

$$\text{si } z' \neq 0; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$$

En particulier:

$$z + \bar{z} = 2 \times \operatorname{Re}(z); \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$$

$$z \text{ imagin pur} \iff \bar{z} + z = 0$$

$$z \text{ réel} \iff \bar{z} = z$$

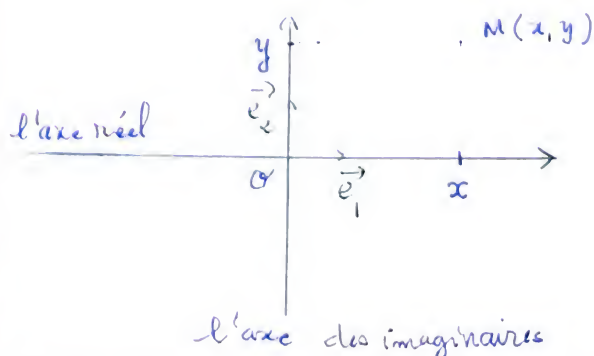
④ Le plan complexe:

On muni le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$z = x + iy$ est représenté par le pt: $M(x, y)$. on dit que:

M est l'image de z et que:

z est l'affixe du pt M :



⑤ Module d'un nombre complexe.

Déf le module de $z = a + ib$
c'est : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Prop :

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad (\text{avec : } z \neq 0)$$

Ex: 2/ Calculer le module de :

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = 1 + \sqrt{2} - 5i$$

$$z_3 = z_1 \times z_2$$

⑥ Argument d'un nombre complexe non nul

Soit $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ et M son image. L'argument θ de z est l'un des mesure de l'angle $(\vec{e}_1; \vec{OM})$.

on le note : $\arg(z)$ et on écrit :

$$\boxed{\arg(z) \equiv \theta [2\pi]}$$

⑦ La forme trigonométrique et la notation exponentielle d'un complexe $\neq 0$.

Soit $z \in \mathbb{C}; z \neq 0$.

on pose : $r = |z|$ et $\text{Arg}(z) \equiv \theta [2\pi]$

• La forme trigonométrique de z c'est :

$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = [r; \theta]$$

• La notation exponentielle de z c'est :

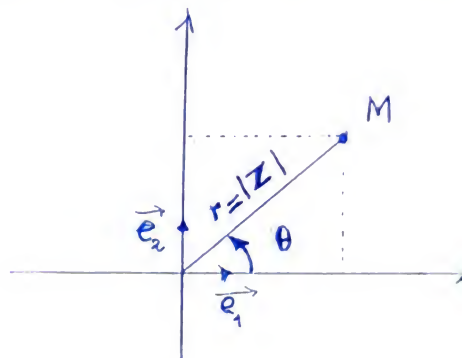
$$z = r e^{i\theta}$$

Req : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$

△ cas particuliers :

si $a \in \mathbb{R}^*$ alors :

$a > 0$	$a < 0$
$a = [a; 0]$	$a = [-a; \pi]$
$ai = [a; \frac{\pi}{2}]$	$ai = [-a; -\frac{\pi}{2}]$



Ex: 3/ ① Calculer l'argument de :

$$z_1 = i; \quad z_2 = 1; \quad z_3 = -1$$

$$z_4 = i^3; \quad z_5 = z_1 \times z_2 \times z_3 \times z_4$$

② Donner la forme trigonométrique de :

$$z_1 = i; \quad z_2 = 3; \quad z_3 = (2i)^3$$

$$z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad z_5 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_6 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad z_7 = -\frac{\sqrt{5}}{3} i$$

Req : pour trouver la forme trigonométrique de $z = x + iy$ on calcul r et θ

avec : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

θ est déterminé dès qu'on calcul

$$\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

et en utilisant le tableau :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1